CHAPITRE 1

SÉRIES NUMÉRIQUES

1.1 Généralités

Définition 1.1.1
Soit $(u_n)_n$ *une suite de nombres réels, on pose :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La limite de S_n *est appelée série de terme général* u_n*.*
$(S_n)_n$ *est appelée suite des sommes partielles de la série.*

Notation

Une série de terme général u_n est notée $\left(\sum u_n\right)$ ou $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$.

1.2 Convergence

Définition 1.2.1
Une série de terme général u_n *est dite convergente si la suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *est convergente.*
Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_n$ *est appelée somme de la série et on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.

En d'autres termes, si on note $\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n$ on a alors :
$\left(\sum_{n\geq} u_n\right)$ converge vers $\ell \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Longrightarrow |S_n - \ell| < \varepsilon)$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\left(n \geq N \Longrightarrow \left|\sum_{k=0}^{n} u_n - \ell\right| < \varepsilon\right).$

Exemple 1.2.1

1) Série géométrique. Une série géométrique est une série dont le terme général est de la forme $u_n = a.q^n$, $a \neq 0$.

Pour ce type de série, le calcul de la somme partielle est donné par la formule suivante :

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = a + a.q + a.q^2 + \cdots + a.q^n = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$

$= \begin{cases} a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si \quad q \neq 1 \\ a(n+1) & si \quad q = 1. \end{cases}$

On remarque ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas la série géométrique converge et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a.q^n = a\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$.

2) Série harmonique. C'est la série dont le terme général est de la forme $u_n = \dfrac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que cette série n'est pas convergente. Pour cela montrons qu'elle n'est pas de Cauchy.

En effet, posons $S_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\cdot$

Alors $S_{2n} - S_n = \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right) - \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$

$= \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}.$

Or pour tout $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$, on $n + 1 \leq p + n \leq 2n$ et par suite :

$$\begin{aligned} 1 + n \leq 2n &\Longrightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}. \\ 2 + n \leq 2n &\Longrightarrow \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}. \\ \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 2n \leq 2n &\Longrightarrow \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Par conséquent $S_{2n} - S_n \geq n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2}$. La suite $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy, donc divergente.

De plus, $(S_n)_n$ est strictement croissante, on déduit alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$.

3) Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ avec $n \geq 1$. On peut écrire après décomposition en éléments simples que : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

D'où $S_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}\cdot$

Comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, notre série est convergente et vaut 1.

Remarque 1.2.1 (Cas complexe)

Si le terme général u_n est complexe $u_n = a_n + ib_n$; la somme partielle est $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ $= \sum\limits_{k=0}^{n}(a_n + ib_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + i\sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Alors on a le résultat suivant :

$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge} \Longleftrightarrow \left(\sum a_n\right) \text{ et } \left(\sum b_n\right) \text{ convergent en même temps}$$

A ce moment là on a le résultat évident $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Proposition 1.2.1
Soient $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *deux séries, on suppose que ces deux séries ne diffèrent que par un nombre fini de termes (i.e il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq p$ *on a* $u_n = v_n$*) alors les deux séries sont de même nature.*

Preuve.
Soit $n \geq p$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k = S_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k.$
$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{p} v_k + \sum_{k=p+1}^{n} v_k = T_p + \sum_{k=p+1}^{n} v_k.$
La différence $S_n - T_n = S_p - T_p = c$; c étant étant une constante indépendente de n et p alors :

$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge } \iff (S_n)_n \text{ converge} \iff (T_n)_n \text{ converge } \iff \left(\sum v_n\right) \text{ converge}$$

Remarque 1.2.2
La proposition (1.2.1) permet de dire que les séries sont de même nature mais en cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.

Corollaire 1.2.1
On ne change pas la nature d'une série $\left(\sum u_n\right)$ *si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.*

Proposition 1.2.2
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série* **convergente** *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. *La réciproque est fausse.*

Preuve.
1) Posons $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$.
$S_n - S_{n-1} = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n) - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) = u_n$ et $\lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0$.
2) La série harmonique $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ est divergente bien qu'elle vérifie $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Remarque 1.2.3
La proposition (1.2.2) est utile sous sa forme contraposée

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right) \textit{ diverge.}$$

On dira que la série est grossièrement divergente

Proposition 1.2.3
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *deux séries convergentes respectivement vers u et v. Alors*

1. *La série* $\left(\sum(u_n+v_n)\right)$ *est convergente et on a* $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n=u+v.$
2. *Pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$, *la série* $\left(\sum \alpha u_n\right)$ *est convergente et on a* $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n)=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\alpha u.$

Preuve.
1) Soit $w_n=u_n+v_n$. On aura :
$W_n=\sum_{k=0}^{n}w_k=\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{n}u_k+\sum_{k=0}^{n}v_k=S_n+T_n$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}W_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n+T_n)=\lim_{n\to+\infty}S_n+\lim_{n\to+\infty}T_n=u+v.$

2) Soit $t_n=\alpha u_n$. $T_n=\sum_{k=0}^{n}t_k=\sum_{k=0}^{n}\alpha t_k=\alpha\sum_{k=0}^{n}u_k=\alpha S_n$ et par suite $\lim_{n\to+\infty}T_n=\lim_{n\to+\infty}(\alpha S_n)=\alpha\lim_{n\to+\infty}S_n=\alpha u.$

Définition 1.2.2 (Critère de Cauchy)
Une série $\left(\sum u_n\right)$ *est dite de Cauchy si la suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *est de Cauchy. Cela revient à dire que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\left(\sum u_n\right)$ *est de Cauchy.*
2. $(S_n)_n$ *est de Cauchy.*
3. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}:\forall p,q\in\mathbb{N}\left(p\geq q\geq N\Longrightarrow|S_p-S_q|<\varepsilon\right).$
4. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}:\forall p,q\in\mathbb{N}\left(p\geq q\geq N\Longrightarrow\left|\sum_{k=0}^{p}u_k-\sum_{k=0}^{q}u_k\right|<\varepsilon\right)$
5. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}:\forall p,q\in\mathbb{N}\left(p\geq q\geq N\Longrightarrow\left|\sum_{k=q+1}^{p}u_k\right|<\varepsilon\right)$

Proposition 1.2.4
Toute série réelle ou complexe de Cauchy est convergente.

1.3 Séries à termes positifs

Définition 1.3.1
Une série $\left(\sum u_n\right)$ *est dite série à termes positifs si* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.3.1

1. *Les séries* $\left(\sum u_n\right)$ *vérifiant* $u_n \geq 0$ *pour* $n \geq n_0$ *sont aussi appelées séries à termes positifs (voir corollaire (1.2.1)) car la nature d'une série ne change pas si on lui retranche un nombre fini de termes.*
2. *Si une série* $\left(\sum u_n\right)$ *est à termes positifs, la suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *est croissante. En effet,* $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$ *; d'où la proposition :*

Proposition 1.3.1
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série à termes positifs.*

$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge} \Longleftrightarrow (S_n)_n \text{ est majorée}$$

Preuve.
Il suffit d'appliquer la remarque (1.3.1) et de se rappeler que les suites croissantes et majorées sont convergentes.

Théorème 1.3.1 (Règle de comparaison)
Soit $\left(\sum u_n\right)$ $\left(\sum v_n\right)$ *deux séries à termes positifs. On suppose que* $0 \leq u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors :*

1. $\left(\sum v_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ *converge.*
2. $\left(\sum u_n\right)$ *diverge* $\Longrightarrow \left(\sum v_n\right)$ *diverge.*

Preuve.
1) $u_n \leq v_n \Longrightarrow S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n \leq \sum_{k=0}^{n} v_k = T_n$. Puisque $(T_n)_n$ est une suite convergente donc majorée alors $(S_n)_n$ est convergente comme étant une suite croissante et majorée, $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2) C'est la contraposée de la première proposition.
Ce théorème reste vrai si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ est réalisée à partir d'une certain ordre p_0 (i.e $u_n \leq v_n$ si $n \geq p_0$).

Exemple 1.3.1
Soit la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$*; on a* $0 \leq \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ *et donc* $\sum \frac{1}{2^n}$ *est une série géométrique convergente, alors la série* $\left(\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ *est convergente.*

Théorème 1.3.2 (Règle de comparaison logarithmique)
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *deux séries à termes strictement positifs. On suppose que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. *Alors*

1. $\left(\sum v_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ *converge.*
2. $\left(\sum u_n\right)$ *diverge* $\Longrightarrow \left(\sum v_n\right)$ *diverge*

Preuve.
1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \Longleftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$.
$\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \cdots \leq \dfrac{u_0}{v_0}$. Ceci implique que $u_n \leq \dfrac{u_0}{v_0} v_n$. Sachant que $\left(\sum v_n\right)$ converge alors $\left(\sum \dfrac{u_0}{v_0} v_n\right)$ converge et d'après le théorème de comparaison ci-dessus, $\left(\sum u_n\right)$ converge.
2) C'est la contraposée de la première proposition.

Théorème 1.3.3 (Critère d'équivalence)
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *deux séries à termes strictement positifs.*
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \ell$, $\ell \neq 0$ *et* $\neq +\infty$. *Alors les deux séries sont de même nature.*

Preuve.
En effet :
$\left(\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \ell\right) \Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon)\right)$.
Pour un ε tel que $0 < \varepsilon < \ell$ on a alors $\ell - \varepsilon < \dfrac{u_n}{v_n} < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On a aussi $(\ell - \varepsilon)v_n < u_n < (\ell + \varepsilon)v_n$ pour tout $n \geq N$.

1) Si $\left(\sum v_n\right)$ converge alors $\left(\sum (\ell + \varepsilon)v_n\right)$ converge et par suite grâce au théorème de comparaison (1.3.1), $\sum (u_n)$ converge.

2) Si $\left(\sum u_n\right)$ converge alors $\left(\sum (\ell - \varepsilon)v_n\right)$ converge et donc $\left(\sum v_n\right)$ converge.

Exercice
Que se passe-t-il si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$?

Exemple 1.3.2
Soient les séries $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *tels que* $u_n = \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$ *et* $v_n = \dfrac{1}{2^n}$. *On a* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ *et comme* $\left(\sum v_n\right)$ *est convergente alors, série gémétrique de raison* $1/2 < 1$; $\left(\sum u_n\right)$ *l'est aussi.*

Exemple 1.3.3
Soient les séries $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *tels que* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $v_n = \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. *On a* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. *La première série étant la série harmonique qui est divergente, donc il en est de même de la seconde.*

Remarque 1.3.2 *On remarque ici qu'on peut facilement démontrer la divergence de* $\left(\sum v_n\right)$.

En effet on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} v_n = \text{Log}\left(1+\frac{1}{1}\right) + \text{Log}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \text{Log}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \text{Log}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) + \text{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \text{Log}\left(\frac{2}{1}\right) + \text{Log}\left(\frac{3}{2}\right) + \text{Log}\left(\frac{4}{2}\right) + \cdots + \text{Log}\left(\frac{n}{n-1}\right) + \text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= (\log 2 - \text{Log}\, 1) + (\log 3 - \text{Log}\, 2) + (\log 4 - \text{Log}\, 3) + \cdots + (\log n - \text{Log}(n-1)) \\ &\quad +(\log(n+1) - \text{Log}\, n)) = \text{Log}(n+1) - \text{Log}\, 1 = \text{Log}(n+1). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \text{Log}(n+1) = +\infty$, *on en conclut que la série considérée est divergente, il en est donc de même de la série harmonique.*
Ceci est une autre démonstration de la divergence de la série harmonique, on verra une troisième démontration différente, voir exemple (1.3.4).

Théorème 1.3.4 (Comparaison avec une intégrale)
Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une application continue, décroissante et positive. On pose* $u_n = f(n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors*

$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ existe}$$

Preuve.
Remarquons tout d'abord la chose suivante :
$(x \in [n, n+1] \Longleftrightarrow n \leq x \leq n+1)$ et comme f est décroissante
$u_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = u_n$. En intégrant membre à membre on obtient
$\int_n^{n+1} u_{n+1}\, dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq \int_n^{n+1} u_n\, dx$ ou encore $u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq u_n$.
En sommant membre à membre, on obtient $\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Finalement on aboutit à :

$$S_{n+1} - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq S_n \quad (*)$$

Démonstration du théorème :
1) Si $\left(\sum u_n\right)$ converge alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ est majorée. Cela veut dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq M$.
D'après la remarque $(*)$ ci-dessous, $\int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq S_n \leq M$.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $n = [t]$ la partie entière de t ;
$\int_1^{t} f(x)\, dx \leq \int_1^{[t]+1} f(x)\, dx = \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq S_n \leq M$.
On passe à la limite quand $t \to +\infty$ ($\Longrightarrow n \to +\infty$), on obtient $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \leq M$.
Ce qui se traduit par l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

2) Inversement, on suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ existe. De la relation $(*)$ on déduit que

$$S_{n+1} \leq u_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = C.$$

La suite $(S_n)_n$ étant croissante et est majorée par C, elle est donc convergente. La série $\left(\sum u_n\right)$ l'est aussi.

Remarque 1.3.3

Le résultat est encore valable si la fonction f est positive, continue et décroissante sur un intervalle $[a, +\infty[$ en considérant la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ avec $n_0 \geq a$.

Exemple 1.3.4

1) Considérons l'application $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \operatorname{Log} t$ *et* $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. *Donc* $\left(\sum \dfrac{1}{n}\right)$ *diverge.*

2) Soit la fonction $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$. f est continue, décroissante (à vérifier en étudiant la dérivée par exemple) et positive.

$\displaystyle\int_1^t f(x)\,dx = \operatorname{Log}\left(\frac{t}{t+1}\right) - \operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}\right)$ *; et comme* $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(x)\,dx = \operatorname{Log} 2 < +\infty$ *;*

la série $\left(\sum \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ *est alors convergente.*

1.3.1 Séries de Riemann

Définition 1.3.2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les séries de Riemann sont donc des séries à termes positifs.

Remarquons que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

On conclut immédiatement que si $\alpha \leq 0$, la série de Riemann est divergente puisque le terme général ne tend pas vers 0.

Si $\alpha = 1$, on obtient la série harmonique qui est divergente elle aussi.

Examinons le cas $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Soit la fonction $f_\alpha : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. f_α est une fonction positive, continue et décroissante car la dérivée $f'_\alpha(x) = \dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$.

On a $\displaystyle\int_1^t f_\alpha(x)\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{-\alpha+1} - 1\right)$ et comme

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

Proposition 1.3.2

Une série de Riemann $\left(\sum \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Les théorèmes (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) vont nous permettre d'étudier beaucoup de séries en les comparant seulement à une série géométrique ou une série de Riemann.

Proposition 1.3.3 (Règle de Riemann)
Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes positifs.

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit majorée par un constante $M > 0$; alors $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.*
2. *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit minorée par une constante $m > 0$; alors la série $\left(\sum u_n\right)$ est divergente.*

Preuve.
1) Par hypothèse $n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$ la série $\left(\sum \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente et d'après le théorème de comparaison $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2) On a $n^\alpha u_n \geq m > 0$ et donc $u_n \geq \dfrac{m}{n^\alpha}$. Le fait que $\alpha \leq 1$ alors $\left(\sum \dfrac{m}{n^\alpha}\right)$ diverge et par suite $\left(\sum u_n\right)$ diverge en vertu du théorème de comparaison.

Corollaire 1.3.1
Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell$, $\ell \neq 0$ et $\ell \neq +\infty$. Les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ sont de même nature.

Preuve.
$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell\right) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Longrightarrow \ell - \varepsilon < n^\alpha u_n < \ell + \varepsilon))$. Ceci est équivalent à dire $\dfrac{\ell - \varepsilon}{n^\alpha} < u_n < \dfrac{\ell + \varepsilon}{n^\alpha}$ pour tout entier $n \geq N$. On choisit alors $\varepsilon > 0$ de manière que $\ell - \varepsilon > 0$.
1) $\left(\sum \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge $\iff \alpha > 1$ et ceci implique que $\left(\sum u_n\right)$ converge.
2) Si $\left(\sum u_n\right)$ converge alors $\left(\sum \dfrac{\ell - \varepsilon}{n^\alpha}\right)$ converge et par suite $\left(\sum \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge et donc $\alpha > 1$.

1.3.2 Critère de de D'Alembert

Proposition 1.3.4
Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes strictement positifs.

1. *S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.*
2. *Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $\left(\sum u_n\right)$ diverge.*

Preuve.
1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda < 1 \Longrightarrow \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \lambda \Longrightarrow u_n \leq \lambda u_{n-1}$.
Par récurrence on obtient $u_n \leq \lambda^n u_0$. Puisque $0 < \lambda < 1$, alors $\left(\sum u_0 \lambda^n\right)$ est une

série géométrique convergente et en vertu du critère de comparaison, la série $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Longrightarrow u_n \leq u_{n+1}$ la suite (u_n) est alors croissante. Puisque $u_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ et par suite $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

Corollaire 1.3.2 (Crière de D'Alembert)
Sous les mêmes hypothèses que la proposition (1.3.4), posons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. $\ell < 1 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ *converge.*
2. $\ell > 1 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ *diverge.*
3. $\ell = 1$, *on ne peut rien conclure.*

Preuve.
1) Si $\ell < 1$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Longrightarrow \ell - \varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon)$.
On choisit dans ces conditions $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$ pour que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon) < 1$. La conclusion est une conséquence de la proposition (1.3.4).

2) Si $\ell > 1$, on choisit ε tel que $\ell - \varepsilon > 1$ et par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon > 1$. D'après la proposition (1.3.4), la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

3) Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. C'est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.
Soit la série de terme général $(v_n = \dfrac{1}{n})$, $n \geq 1$, (c'est la série harmonique divergente).
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.
Ces deux exemples illustrent bien le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ n'apporte aucune information sur la nature de la série $\left(\sum u_n\right)$.

Exemple 1.3.5

1) Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$. *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$ *est convergente.*
2) Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$ *et par suite la série est divergente.*

1.3.3 Critère de Cauchy

Proposition 1.3.5
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série à termes positifs.*

1. *S'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$ *tel que* $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ *alors la série* $\left(\sum u_n\right)$ *converge.*
2. *Si* $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, *la série est alors divergente.*

Preuve.
1) $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda \Longrightarrow u_n \leq \lambda^n$. $\left(\sum \lambda^n\right)$ étant une série géométrique convergente ($0 < \lambda < 1$), d'après le théorème de comparaison $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2) $\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Longrightarrow u_n \geq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1$ et donc $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

Corollaire 1.3.3 (Critère de Cauchy)
Sous les mêmes hypothèses de la proposition (1.3.5), posons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

1. $\ell < 1 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ *converge.*
2. $\ell > 1 \Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ *diverge.*
3. $\ell = 1$ *on ne peut rien conclure.*

Preuve.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Longrightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon)$ ou encore $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Longrightarrow (\ell - \varepsilon)^n < u_n < (\ell + \varepsilon)^n)$.

1) Si $\ell < 1$. On choisit ε tel que $0 < \ell + \varepsilon < 1$. La série $\left(\sum (l + \varepsilon)^n\right)$ est alors convergente et par voie de conséquence $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2) Si $\ell > 1$. On choisit ε vérifiant $\ell - \varepsilon > 1$. On aura alors $u_n > (\ell - \varepsilon)^n > 1$ ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1$ et par suite la série diverge.

3) Prenons la série harmonique $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n}$. Cette diverge bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$.

Soit la série de Riemann convergente $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Exemple 1.3.6
Soit la série de terme général $\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p \geqslant 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(a + \frac{1}{n^p}\right)$$

1) Si $p = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$ *et la série diverge.*
2) Si $p > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$. *La série est convergente pour* $a < 1$ *et divergente si* $a > 1$.
3) Si $a = 1$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^{n^p}\right]^{n^{1-p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < p < 1 \\ \mathrm{e} & \text{si } p = 1 \\ 1 & \text{si } p > 1 \end{cases}$
Le terme général ne tend pas vers zéro, la série est divergente.

Une question se pose maintenant ; peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critères de d'Alembert et celui de Cauchy ? La réponse est donnée par les deux propositions suivantes.

Proposition 1.3.6
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série à termes positifs. Alors si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell_1\neq 0 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell_2\neq 0$$

on a $\ell_1=\ell_2$.

Preuve.
Considérons la série de terme général $v_n = a^n.u_n$; où a est un réel positif qu'on va préciser. On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=a\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a\ell_1 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{v_n}=a\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=a\ell_2\neq 0.$$

Fixons a strictement entre $\frac{1}{\ell_1}$ et $\frac{1}{\ell_2}$ alors nécessairement 1 est compris entre $a\ell_1$ et $a\ell_2$; donc notre série de terme général v_n est convergente suivant un critère et divergente suivant l'autre, ce qui est absurde ; d'où $\ell_1=\ell_2$.

Proposition 1.3.7
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série à termes positifs. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$$

On n'a pas l'équivalence.

Preuve.
Soit $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$. Alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N$ on ait : $\ell-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\ell+\frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n\geq N$.

$$\begin{array}{cccc}
\ell-\frac{\varepsilon}{2} < & \frac{u_n}{u_{n-1}} & < \ell+\frac{\varepsilon}{2}. \\
\ell-\frac{\varepsilon}{2} < & \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} & < \ell+\frac{\varepsilon}{2}. \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\
\ell-\frac{\varepsilon}{2} < & \frac{u_{N+1}}{u_N} & < \ell+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{array}$$

En faisant le produit membres à membres, on obtient :

$$\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N}<\frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\frac{u_{N+1}}{u_N}<\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N}.$$

Après simplification on obtient : $u_N\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N}<\frac{u_n}{u_N}<\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N}$ et donc

$$u_N^{\frac{1}{n}}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}<\sqrt[n]{u_n}<u_N^{\frac{1}{n}}\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}.$$

Soit $\alpha_n=u_N^{\frac{1}{n}}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}$ et $\beta_n=u_N^{\frac{1}{n}}\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}$.

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell - \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1$ on ait $\alpha_n > \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon.$
$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \ell + \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2$ on ait $\beta_n < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon.$
Soit $N_3 \geq \max\{N, N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N_3$ on a :
$\ell - \varepsilon < \alpha_n < \sqrt[n]{u_n} < \beta_n < \ell + \varepsilon$, ce qui exprime bien que $\left|\sqrt[n]{u_n} - \ell\right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_3$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$

Contre-exemple

Soit $a > 0$ et $b > 0$, $a \neq b$ et considérons la série $\left(\sum u_n\right)$ définie par

$$u_n = \begin{cases} a^{n+1}b^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ a^{n+1}b^{n+1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + a^3b^3 + \cdots$$

En utilisant le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{n+1}b^n} = a^{\frac{n+1}{2n}}b^{\frac{1}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sqrt[2n+1]{a^{n+1}b^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}}b^{\frac{n+1}{2n+1}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Dans les deux cas,on a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}.$
En utilisant la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \dfrac{(ab)^{n+1}}{a^{n+1}b^n} = b & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{a^{n+2}b^{n+1}}{(ab)^{n+1}} = a & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} b & \text{si } n \text{ est pair} \\ a & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc la limite n'existe pas. Cette exemple montre bien que le critère de Cauchy est plus "fort" que celui de D'Alembert.
Un autre exemple plus simple est $u_{2n} = 2$ et $u_{2n+1} = 3$, le série est donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 3/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2/3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$$

1.3.4 Critère de Kummer

Proposition 1.3.8

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes strictement positifs.

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha$ alors la série est convergente.*
2. *Si $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq \alpha$ alors la série diverge.*

Preuve.
1) **Cas où** $\alpha > 1$.
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^{-\alpha}$. Son développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 est donné par :
$f(x) = f(0) + x\dfrac{f'(0)}{1!} + x^2\dfrac{f''(\theta_x)}{2!}$, avec $0 < \theta_x < 1$.
$f(x) = 1 - \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!}(1+\theta_x)^{-\alpha-2}x^2$. Pour $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient :
$f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!}(1+\theta_{\frac{1}{n}})^{-\alpha-2}\dfrac{1}{n^2} \geq 1 - \dfrac{\alpha}{n}$. L'hypothèse $n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha$ étant équivalente à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \dfrac{\alpha}{n}$, nous permet d'avoir finalement
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \dfrac{\alpha}{n} \leq f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$.
Soit $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\left(\sum v_n\right)$ est une série de Riemann convergente. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et d'après le critère de comparaison logarithmique (1.3.2), la série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.
2) On suppose que $n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 1$. Ceci implique $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$. Posons $w_n = \dfrac{1}{n-1}$, $n \geq 2$. $\left(\sum w_n\right)$ est la série harmonique divergente. De plus $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
D'après critère de comparaison logarithmique (1.3.2), la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

Corollaire 1.3.4 (Critère de Raab)
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série à termes strictement positifs. On pose* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$.

1. *Si* $\ell > 1$ *alors la série* $\left(\sum u_n\right)$ *converge.*
2. *Si* $\ell < 1$ *alors la série* $\left(\sum u_n\right)$ *diverge.*
3. *Si* $\ell = 1$*, on ne peut rien conclure.*

Preuve.
On utilise toujours la définition de la limite d'une suite quand elle existe :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell \Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\left(n \geq N \Longrightarrow \ell - \varepsilon < n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < \ell + \varepsilon\right)$$

1) Si $\ell > 1$. On choisit ε de manière à avoir $\ell - \varepsilon = \alpha > 1$ pour qu'on ait $n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha$ pour $n \geq N$ et par suite utiliser le critère de Kummer pour affirmer qu'il y a convergence.

2) Si $\ell < 1$. On choisit ε tel que $0 < \varepsilon \leq 1 - \ell$. Dans ces conditions, on aura $n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) < \ell + \varepsilon < 1$ pour tout $n \geq N$ et donc la série diverge.

1.4 Séries à termes quelconques

Le paragraphe précédent était consacré à l'étude des séries à termes positifs et c'est dans cette partie qu'il y a beaucoup de résultats sur la convergence . Dans ce paragraphe il sera question des séries à termes quelconques.

1.4.1 Regroupement des termes

Théorème 1.4.1
Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série à termes quelconques et soit* $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ *une application strictement croissante vérifiant* $\varphi(0) = 0$ *. On suppose en plus :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$
2. $\exists M \in \mathbb{N}$ *tel que* $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

On considère la série $\left(\sum v_n\right)$ *définie par* $v_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k.$

Alors les séries $\left(\sum u_n\right)$ *et* $\left(\sum v_n\right)$ *sont de même nature.*

Si les séries sont convergentes on a en plus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Remarque 1.4.1
Prenons un exemple d'application pour comprendre les hypothèses de ce théorème.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ *définie par* $\varphi(n) = 2n.$

On a $\varphi(n+1) - \varphi(n) = 2n + 2 - 2n = 2 = M$ *et* $v_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} u_k = u_{2n+1} + u_{2n+2}.$

Ceci donne par exemple $v_0 = u_1 + u_2$, $v_1 = u_3 + u_4$ *et ainsi de suite. On remarque sur cet exemple que les termes sont regroupés 2 par 2.*

Preuve.
Notons comme d'habitude $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les suites des sommes partielles respectivement des séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$.

$T_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} v_p = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \sum_{k=\varphi(0)+1}^{\varphi(1)} u_k + \sum_{k=\varphi(1)+1}^{\varphi(2)} u_k + \cdots + \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\varphi(n+1)} u_k = S_{\varphi(n+1)}$. Sachant que φ est une application strictement croissante, la suite $(T_n)_n$ est alors une suite extraite de de $(S_n)_n$. Par conséquent :

1) $\left(\sum u_n\right)$ converge $\Longrightarrow$ $(S_n)_n$ converge $\Longrightarrow$ $(S_{\varphi(n+1)})_n$ converge $\Longrightarrow$ $(T_n)_n$ converge $\Longrightarrow \left(\sum v_n\right)$ converge.

2) Si $\left(\sum u_n\right)$diverge.
φ étant strictement croissante on a $\varphi(n) < \varphi(n+1)$. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(p) \leq n < \varphi(p+1)$.

$S_n - S_{\varphi(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(p)} = \sum_{k=\varphi(p)+1}^{n} u_k$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il

existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ pour tout $n \geq N$. Pour p assez grand ($\varphi(p)+1 \geq N$), on a $|S_n - S_{\varphi(p)}| = \left|\displaystyle\sum_{k=\varphi(p)+1}^{n} u_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=\varphi(p)+1}^{n} |u_k| < \dfrac{\varepsilon}{M}(n-\varphi(p)) \leq \dfrac{\varepsilon}{M}(\varphi(p+1)-\varphi(p)) \leq \varepsilon$ car on a par hypothèse $\varphi(p+1)-\varphi(p) \leq M$. On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - S_p = 0$ et puisque la suite $(S_n)_n$ diverge alors $(S_{\varphi(p)})$ diverge et par suite (T_p) diverge car $S_{\varphi(p)} = T_{p-1}$.

Exemple 1.4.1

Soit la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *et soit* $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ *définie par* $\varphi(n) = 2n$. $v_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} u_k = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Posons $w_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. $\left(\sum w_n\right)$ *est convergente car* $w_n \leq \dfrac{1}{4n^2}$ *et* $\left(\sum \dfrac{1}{4n^2}\right)$ *est convergente. En conclusion :*

$\left(\sum w_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum -w_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum v_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ *converge.*

Théorème 1.4.2 (Critère D'Abel)

Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série à termes quelconques. On suppose qu'il existe deux suites* $(\varepsilon_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *telles que :*

1. $u_n = \varepsilon_n v_n$ *pour tout* n.
2. *Il existe* $M >$ *tel que pour tout* $p, q \in \mathbb{N}$ $\left(p \geq q \Longrightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=q}^{p} v_k\right| \leq M\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}|$ *converge.*
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Alors la série $\left(\sum u_n\right)$ *converge.*

Preuve.

On va montrer que les conditions du théorème impliquent que la série $\left(\sum u_n\right)$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$ et posons

$$V_{q,p} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=q}^{p} v_k & si \quad p \geq q \\ 0 & si \quad p < q \end{cases}$$

Soit $n+1 \leq p$.

$V_{n,p} - V_{n+1,p} = \displaystyle\sum_{k=n}^{p} v_k - \sum_{k=n+1}^{p} v_k = v_n$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q+1}^{p} u_k &= \sum_{k=q+1}^{p} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=q+1}^{p} \varepsilon_k (V_{k,p} - V_{k+1,p}) \\
&= \varepsilon_{q+1}(V_{q+1} - V_{q+2,p}) + \varepsilon_{q+2}(V_{q+2} - V_{q+3,p}) + \ldots + \varepsilon_p(V_{p,p} - V_{p+1,p}) \\
&= \varepsilon_{q+1} V_{q+1,p} - \varepsilon_p V_{p+1,p} + V_{q+2,p}(\varepsilon_{q+2} - \varepsilon_{q+1}) + V_{q+3,p}(\varepsilon_{q+3} - \varepsilon_{q+2}) + \ldots V_{p,p}(\varepsilon_p - \varepsilon_{p-1}) \\
&= \varepsilon_{q+1} V_{q+1,p} - \varepsilon_p V_{p+1,p} + \sum_{k=q+2}^{p} V_{k,p}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}).
\end{aligned}$$

Donc $\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq |\varepsilon_{q+1}| \cdot |V_{q+1,p}| + |\varepsilon_p| \cdot |V_{p+1,p}| + \sum_{k=q+2}^{p} |V_{k,p}| \cdot |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}|.$

De plus on a les conséquences suivantes :

a) $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0 \Longrightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{3M}$ pour tout $n \geq N_1$.

b) La série $\left(\sum |\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}|\right)$ converge donc elle est de Cauchy. Il existe alors $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq N_2$ et $q \geq N_2$, $(p \geq q)$ on a $\sum_{k=q+1}^{p} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$.

c) $|\sum_{k=q}^{p} v_k| \leq M$ pour tous p et q, $p \geq q$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour $n \geq N$ on a alors $\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3M} M + \dfrac{\varepsilon}{3M} M + \dfrac{\varepsilon}{3M} M = \varepsilon$. La série $\left(\sum u_n\right)$ est alors de Cauchy donc convergente.

Exemple 1.4.2

Appliquons ce théorème pour étudier la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ *qu'on sait qu'elle converge d'après l'exemple (1.4.1).*

Soit $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $v_n = (-1)^n$.

$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ *et* $|(-1)^n| \leq 1 = M$. *La série* $\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ *est convergente car elle est équivalente à la série de Riemann* $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Nous allons étudier un cas particulier de série à termes quelconques à savoir les séries alternées.

1.4.2 Séries alternées

Définition 1.4.1

On appelle série alternée toute série $\left(\sum u_n\right)$ *vérifiant la relation* $u_n.u_{n+1} \leq 0$.
Le terme général u_n *d'une telle série peut-être noté* $u_n = (-1)^n v_n$ *ou* $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ *avec* $v_n \geq 0$.

Dans le cas général une série alternée sera souvent notée : $\left(\sum (-1)^n |u_n|\right)$.

Théorème 1.4.3 (Critère de Leibniz)

Soit $\left(\sum u_n\right)$ *une série alternée. On suppose que :*

1. *La suite $(|u_n|)_n$ est décroissante.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.

Preuve.
On suppose pour se fixer les idées que $u_{2n+1} \geq 0$ et $u_{2n} \leq 0$.
a) $U_{2n+1} - U_{2n} = u_{2n+1} \geq 0$ et donc $U_{2n+1} \geq U_{2n}$.
b) $U_{2n+1} - U_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n} \leq 0$ car $|u_{2n+1}| = u_{2n+1} \leq |u_{2n}| = -u_{2n}$ d'après l'hypothèse (1) du théorème. La suite $(U_{2n-1})_n$ est donc décroissante.
c) $U_{2n+2} - U_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} \geq 0$ car $|u_{2n+2}| = -u_{2n+2} \leq |u_{2n+1}| = u_{2n+1}$. La suite $(U_{2n})_n$ est donc croissante.
En regroupant les résultats (a), (b) et (c), on a la situation suivante :
$U_0 \leq U_{2n} \leq U_{2n+2} \leq U_{2n+1} \leq U_{2n-1} \leq U_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(U_{2n})_n$ est croissante majorée par U_1, $(U_{2n+1})_n$ est décroissante minorée par U_0. Elles sont donc toutes les deux convergentes. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_{2n+1} - U_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. Ceci traduit le fait que la série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.
Au fait, les suites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

1.5 Séries absolument convergentes

Définition 1.5.1
Une série $\left(\sum u_n\right)$ est dite absolument convergente si la série $\left(\sum |u_n|\right)$ est convergente.
Il est clair que toute série à termes positifs convergente est absolument convergente.

Théorème 1.5.1
Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.
En d'autres termes : $\left(\sum |u_n|\right)$ converge $\Longrightarrow \left(\sum u_n\right)$ converge.

Preuve.
On va prouver que $\left(\sum u_n\right)$ est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$ et p, q deux entiers tels que $p \geq q$. $\left|U_p - U_q\right| = \left|\sum\limits_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq \sum\limits_{k=q+1}^{p} |u_k|$. Comme la série $\left(\sum |u_n|\right)$ converge, elle est de Cauchy. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}(p \geq q \geq N)$ on a $\left|\sum\limits_{k=q+1}^{p} |u_k|\right| = \sum\limits_{k=q+1}^{p} |u_k| < \varepsilon$. Donc pour $p \geq q \geq N$, $|U_p - U_q| \leq \sum\limits_{k=q+1}^{p} |u_k| < \varepsilon$ et par suite $(U_n)_n$ est de Cauchy donc convergente et ainsi $\left(\sum u_n\right)$ converge aussi.

Remarque 1.5.1
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_n\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |u_n|$ (inégalité triangulaire). En cas de convergence absolue, cette inégalité est conservée ; à savoir $\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_n|$

Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de considérer la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qu'on a vu qu'elle est convergente mais pas absolument convergente puisque $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

Théorème 1.5.2
Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série absolument convergente. Alors pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ on a :

1. *$\left(\sum u_{\varphi(n)}\right)$ est absolument convergente.*
2. *$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.*

Preuve.
La démonstration se fera en deux étapes :
1) Etape 1. On suppose que $u_n \geq 0$.
Alors : $\left(\sum u_n\right)$ convergente $\Longleftrightarrow \left(\sum u_n\right)$ absolument convergente.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ une bijection et posons $v_n = u_{\varphi(n)}$. $V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = u_{\varphi(0)} + u_{\varphi(1)} + \ldots + u_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Puisque la suite des sommes partielles $(V_n)_n$ est croissante et est majorée par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ alors $(V_n)_n$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
De même, φ^{-1} est bijective, $u_n = v_{\varphi^{-1}(n)}$.
$U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = v_{\varphi^{-1}(0)} + v_{\varphi^{-1}(1)} + \ldots + v_{\varphi^{-1}(n) \leq} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. En passant à la limite et sachant que les séries convergent on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et par conséquent $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
1) Etape 2. $\left(\sum u_n\right)$ est une série à termes quelconques telle que $\left(\sum |u_n|\right)$ converge.
D'après l'étape 1, $\left(\sum |u_n|\right)$ converge $\Longrightarrow \left(\sum |v_n|\right)$ converge, avec $v_n = u_{\varphi(n)}$ et on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right)$.
Posons $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$ et $u_n^- = \max\{-u_n, 0\}$. On a $u_n^+ \geq 0$, $u_n^- \geq 0$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$. On a aussi comme conséquence $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Puisque la série $\left(\sum |u_n|\right)$ est convergente alors et d'après le théorème de comparaison les séries $\left(\sum u_n^+\right)$ et $\left(\sum u_n^-\right)$ sont convergentes.
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$.
Or $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}^+$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}^-$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^+_{\varphi(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} u^-_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque 1.5.2

Le théorème précédent cesse d'être vrai si la série $\left(\sum u_n\right)$ *est seulement convergente. La série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *est convergente (voir l'exemple 1.4.2) mais n'est pas absolument convergente.*

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \ldots = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}\right) + \ldots.$

On pose $v_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} = \frac{1}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2(2n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right).$

$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$

En réorganisant autrement la somme d'une série convergente, on obtient une série convergente mais pas de même somme. Cela est dû au fait que l'addition d'une infinité de termes n'est pas nécessairement commutative.

✰ Un bel exemple de série convergente et non commutativement converg ente.

Soit le série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Il s'agit d'une série alternée et le terme $\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ décroit vers zéro, ce qui assure la convergence de la série donnée.

On a : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}[\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n]$

$= [\operatorname{Log} 2 - \operatorname{Log} 1] - [\operatorname{Log} 3 - \operatorname{Log} 2] + [\operatorname{Log} 4 - \operatorname{Log} 3] - [\operatorname{Log} 5 - \operatorname{Log} 4] + \cdots$

$= 2[\operatorname{Log} 2 - \operatorname{Log} 3 + \operatorname{Log} 4 - \operatorname{Log} 5 + \cdots] = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Log} n.$

la série ainsi obtenue est grossièrement divergente, puisque le terme général ne tend pas vers zéro.

Il est facil de vérifier que la série n'est pas absolument convergente.